La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico[1]

Marianna Bosch, Francisco Javier García, Josep Gascón y Luisa Ruiz Higueras

Resumen: En la primera parte del artículo introducimos algunas nociones fundamentales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que nos suministrarán las herramientas de análisis didáctico necesarias para reconstruir una posible evolución del dominio de investigación "modelización y aplicaciones" y también para proponer una reformulación de lo que se entiende por procesos de modelización. En la segunda parte, justificamos la pertinencia de esta reformulación para plantear y abordar nuevos problemas de investigación. Tras introducir el *problema de la articulación de la matemática escolar,* nos centraremos en una de sus manifestaciones en el estudio de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria Española. Para responder a este problema, hemos diseñado y experimentado un *proceso didáctico,* cuyo objetivo es desarrollar en la Educación Secundaria Obligatoria una actividad matemática integrada y articulada en torno al estudio de los sistemas de variación entre magnitudes.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, programa epistemológico, modelización matemática, proporcionalidad, relaciones funcionales.

Abstract: In the first part of the paper we introduce some notions of the Anthropological Theory of the Didactic that are used as theoretical tools for the reconstruction of a possible evolution of the research domain known as "modelling and applications" and to propose a reformulation of what is considered as modelling processes. In the second part of the paper, we justify the relevance of this reformulation to formulate and tackle with new research problems. After introducing the *problem of the connection of the school mathematics,* we focus in one of its manifestations in the study of functional relations in Spanish Secondary Education. As a possible answer, we have designed and experimented a *process of study* which aim is to develop an integrated mathematical activity in Compulsory Sec-

Fecha de recepción: 27 de febrero de 2006.

[1] Esta investigación se ha realizado en el marco del proyecto BSO2003-04000 del Plan Nacional I + D + I del Ministerio de Educación y Ciencia de España.

ondary Education concerning the topic of the variation systems between magnitudes.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics, epistemological program, mathematical modelling, proportionality, functional relationships.

LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

LA MODELIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN TÉRMINOS DE PRAXEOLOGÍAS

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante, TAD) aparece con las primeras formulaciones de la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985). Puede ser considerada como un desarrollo de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), con la que comparte sus principios fundamentales. Dos problemas básicos pueden ser considerados como el origen de la TAD:

- Por una parte, la necesidad del investigador de emanciparse de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares (Chevallard, 2006) (lo que implica que la TAD nos proporciona nociones para liberarnos de la manera en la que se consideran el conocimiento matemático y la actividad matemática en las instituciones escolares).
- Por otra parte, el cuestionamiento de las condiciones y restricciones que afectan a todo proceso de difusión del conocimiento matemático en la escuela (es decir, el estudio de lo que hace posible la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, lo que lo dificulta, etcétera).

La TAD propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante *praxeologías* (*praxis* + *logos*). Esta noción primitiva constituye la herramienta fundamental propuesta desde la TAD para modelizar la actividad matemática, entendida como una actividad humana más. Concisamente, en toda actividad humana es posible distinguir entre:

- El nivel de la *praxis* o del “saber hacer”, que engloba un cierto *tipo de problemas* y cuestiones que se estudian, así como las *técnicas* para resolverlos.
- El nivel del *logos* o del “saber” en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, y que recibe el nombre de *tecnología*. Dentro del “saber” se postula un segundo nivel de

descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel de la tecnología de la tecnología) que se denomina *teoría*.

Posteriormente, y con el propósito de tener herramientas más precisas para analizar los procesos didácticos institucionales, Chevallard (1999) introdujo la distinción de diferentes tipos de praxeologías (u organizaciones matemáticas), según el grado de complejidad de sus componentes:

- *Praxeologías puntuales,* si están generadas por lo que se considera en la institución como un único *tipo de tareas* T. Esta noción es relativa a la institución considerada y está definida, en principio, a partir del bloque práctico-técnico $[T/\tau]$.
- *Praxeologías locales,* resultado de la integración de diversas praxeologías *puntuales*. Cada praxeología *local* está caracterizada por una *tecnología* q, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías *puntuales* que la integran.
- *Praxeologías regionales,* se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración alrededor de una teoría matemática común Q, de diversas praxeologías *locales*. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar, justificar y producir las diferentes tecnologías (θ_j) de las praxeologías locales (PL_j) que integran la praxeología *regional.*
- *Praxeologías globales,* que surgen agregando varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

De manera simplificada, es posible afirmar que lo que se aprende y enseña en una institución escolar son praxeologías matemáticas o, al menos, ciertos componentes de éstas. Las praxeologías rara vez son personales, más bien son compartidas por grupos de seres humanos organizados en instituciones.

El *proceso de estudio:* las praxeologías didácticas

Las praxeologías matemáticas no surgen de manera instantánea en las instituciones, ni aparecen acabadas de modo definitivo. Más bien, por el contrario, son el resultado de un trabajo complejo y continuado que se realiza durante largo tiempo, en cuya dinámica de funcionamiento existen ciertas relaciones invariables y que, por tanto, es posible modelizar. Aparecen aquí los dos aspectos inseparables del trabajo matemático: por un lado, el proceso de construcción matemática, esto es, el *proceso de estudio* y, por otro, el propio resultado de esta construcción, es decir, la *praxeología matemática*. En efecto, no hay organización matemática sin un proceso de estudio que la engendre, pero tampoco hay proceso de estudio sin una organización matemática en construcción. Proceso y producto son dos caras de una misma moneda. Ante una tarea problemática, el matemático usa y construye matemáticas, realizándolo todo a la vez.

La consideración de diversos procesos de construcción matemática permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos,[2] esto es, dimensiones o *momentos* que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática, independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole. La noción de *momento didáctico* se utiliza no tanto en el sentido cronológico como en el sentido de *dimensión* de la actividad. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos: *1) el momento del primer encuentro* con un determinado tipo de tareas; *2) el momento exploratorio* del tipo de tareas; *3) el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico* (que explique y justifique las técnicas puestas en funcionamiento, así como que permita la construcción de nuevas técnicas); *4) el momento de trabajo de la técnica* (que provoca la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas técnicas); *5) el momento de la institucionalización* (que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida), y *6) el momento de la evaluación* de la praxeología construida.

Ahora bien, la estructura del proceso de estudio no es lineal. Cada momento puede ser vivido con distintas intensidades, en diversos tiempos, tantas veces como sea necesario a lo largo del proceso de estudio, e incluso es habitual que algunos de ellos aparezcan simultáneamente. Lo que sí es importante destacar es que cada uno de los seis momentos del estudio desempeña una función específica necesaria para llevar a buen término el proceso y existe una dinámica interna global que se manifiesta en el carácter invariante de ciertas relaciones entre dichos momentos. Todo proceso de estudio, en cuanto actividad humana, puede

[2] Detectar aspectos invariantes respecto a los procesos de construcción matemática no presupone ningún tipo de esencialismo metafísico. Según Max Weber (2006), la única manera de analizar fenómenos culturales es mediante la construcción de conceptos tipo ideales que se refieren a situaciones o fenómenos posibles. Estos conceptos son los que hacen el papel de conceptos científicos en las ciencias humanas experimentales (como, por ejemplo, la Didáctica de las Matemáticas). Cumplen la función de servir para comparar la realidad concreta con los tipos ideales que son construcciones racionales, lo que no significa que sean “arbitrarias”.

ser modelado mediante una praxeología, que será denominada *praxeología didáctica*. Como toda praxeología, estará compuesta por un conjunto de *tareas didácticas* problemáticas, *técnicas didácticas* para abordarlas y *tecnologías* y *teorías didácticas* que las expliquen y las justifiquen.

Surge, de este modo, una nueva concepción de la Didáctica de las Matemáticas en la que *lo didáctico* se identifica con aquello relacionado con el *estudio* y con la *ayuda al estudio*:

> La didáctica de las matemáticas es la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio -o procesos didácticos- de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.) que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a otros a estudiar matemáticas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 60).

Los niveles de determinación didáctica

Toda actividad matemática supone la activación de, al menos, una praxeología matemática. Sin embargo, tanto esta actividad matemática como sus posibles resultados están condicionados por múltiples restricciones. La Teoría Antropológica de lo Didáctico propone una *jerarquía de niveles de determinación* (Chevallard, 2001a, 2002a, 2002b) entre las praxeologías u organizaciones matemáticas (en adelante, OM) escolares y las correspondientes praxeologías u organizaciones didácticas (en adelante, OD). Dicha jerarquía se estructura mediante una sucesión de niveles que determinan las mutuas dependencias entre OM y OD:

$$\text{Civilización} \rightarrow \text{Sociedad} \rightarrow \text{Escuela} \rightarrow \text{Pedagogía} \rightarrow \text{Disciplina} \rightarrow \\ \text{Área} \rightarrow \text{Sector} \rightarrow \text{Tema} \rightarrow \text{Cuestión}$$

En cada nivel se producen restricciones recíprocas entre las OM y las OD, esto es: la estructuración de las OM en cada nivel de la jerarquía condiciona las formas posibles de organizar su estudio y, recíprocamente, la naturaleza y las funciones de los dispositivos didácticos existentes en cada nivel determinan, en gran parte, el tipo de OM que será posible reconstruir en dicha institución escolar.

Toda cuestión Q que genera un proceso de estudio en una institución didáctica está integrada en un tema, perteneciente a un sector, incluido en un área de una cierta disciplina. Si esta disciplina son "las matemáticas", llamaremos a estos niveles los *niveles "matemáticos*". En contraposición, los niveles más allá de la "disciplina" son considerados como *niveles "pedagógicos*".

> Por ejemplo, la cuestión "¿Cuáles son las simetrías de un rectángulo no cuadrado?" se considera hoy en día, en la mayoría de los sistemas escolares en los que se estudia esta cuestión, como perteneciendo al tema de las "Simetrías de polígonos", que se incluye en el sector de las "Transformaciones del plano" que se incluye dentro del área de la Geometría, que pertenece a la disciplina Matemáticas (Chevallard, 2001a, p. 3).

Sin embargo, el hecho de que se construya esta jerarquía no garantiza la calidad de su estudio. Para que una cuestión matemática pueda estudiarse con "sentido" en la escuela, es necesario (Gascón, 2003b):

1. Que provenga de cuestiones que la Sociedad propone para que se estudien en la escuela (legitimidad cultural o social).
2. Que aparezca en ciertas *situaciones* "umbilicales" de las matemáticas, esto es, situadas en la *raíz central* de las matemáticas (*legitimidad matemática*).
3. Que *conduzca a alguna parte*, esto es, que esté relacionada con otras cuestiones que se estudian en la escuela, sean matemáticas o relativas a otras disciplinas (*legitimidad funcional*).

Si para una cuestión determinada no se construye una jerarquía que cumpla los postulados (1), (2) y (3), tal cuestión carece de *sentido*, puesto que ha desaparecido la *razón de ser* de su estudio en la escuela. En tal caso, se dice que es una cuestión encerrada en sí misma o una cuestión "muerta" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Por ejemplo, en García (2005) hemos mostrado que, en la educación secundaria española, existen dos jerarquías diferentes relativas al estudio de la relación de proporcionalidad entre magnitudes. La primera sitúa la relación de proporcionalidad en el sector "Proporcionalidad" y en el área de "Números y medidas". Esto implica que la relación de proporcionalidad se concibe como una relación *estática* entre cantidades de magnitudes, modelada en términos de *razones y proporciones* (modelización "clásica"). La segunda ubica la relación de proporcionalidad en el sector de "Caracterización de dependencias" que forma parte del área

"Funciones y su representación gráfica". La proporcionalidad se concibe ahora como una relación *dinámica* modelada en términos de *funciones lineales* (modelización funcional). Entre ambas es posible encontrar, en los manuales escolares, componentes praxeológicos de una tercera praxeología que modela la relación de proporcionalidad en términos de *ecuaciones lineales* entre medidas de las cantidades de las magnitudes relacionadas (modelización "ecuacional"). La existencia de estas dos jerarquías da lugar a la reconstrucción, en la actual educación secundaria española, de dos praxeologías diferentes, estudiadas en diferentes momentos del año escolar y deficientemente articuladas entre sí.

Tradicionalmente, el trabajo del profesor ha quedado limitado a los niveles "Tema → Cuestión". Los niveles superiores quedan determinados por los documentos curriculares oficiales y por las autoridades educativas. Este fenómeno, identificado por Chevallard (2001a) como el *fenómeno del autismo temático del profesor,* ha provocado que los temas y las cuestiones que se estudian en la escuela hayan perdido su *razón de ser,* esto es, las razones que motivaron su presencia en la institución escolar. Estos temas y cuestiones aparecen como si siempre hubiesen existido y su estructuración siempre hubiese sido la misma, y están conectados sólo nominalmente con los niveles superiores. Chevallard (2001a) considera que se trata de *cuestiones muertas,* puesto que la institución ignora de dónde proceden y hacia dónde van. Se produce así un *fenómeno de monumentalización* de las organizaciones matemáticas escolares: los alumnos son invitados a *visitarlas,* pero no a construirlas.

LA INVESTIGACIÓN EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Desde los años 1980 se observa en la investigación en educación matemática un creciente interés por el papel que los procesos de modelización pueden desempeñar en la enseñaza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles del sistema educativo. Durante mucho tiempo, la "modelización" ha estado restringida a la aplicación de un conocimiento matemático previamente construido a determinadas situaciones "reales". Hoy día, perdura este uso del término "modelización".

En la actualidad, en la investigación en educación matemática se considera el término "modelización" de manera más rica y fértil, configurando un amplio y heterogéneo dominio de investigación que no ha dejado de crecer en los últimos años. Tanto desde la investigación en educación matemática como desde diferentes segmentos de la sociedad, es usual oír hablar de la necesidad de relacionar los contenidos matemáticos con ciertos aspectos de la vida real y sobre la necesidad de desarrollar la "competencia modeladora" como una competencia matemática básica de cualquier ciudadano, como recoge el reciente informe mundial PISA realizado por la OCDE (OCDE, 2003).

Para explorar la evolución de lo que podemos llamar el "problema de la modelización", proponemos comenzar a partir de dos cuestiones problemáticas, inicialmente disjuntas:

a) Por un lado, la idea de tomar de la *matemática sabia* los procesos de modelización como una herramienta "valiosa" desde el punto de vista didáctico. En otros términos, la cuestión problemática que situamos como punto de partida de esta reconstrucción, formulada de manera general, sería: ¿cómo podrían los *procesos de modelización* mejorar la enseñanza de las matemáticas y la comprensión de los conceptos matemáticos?

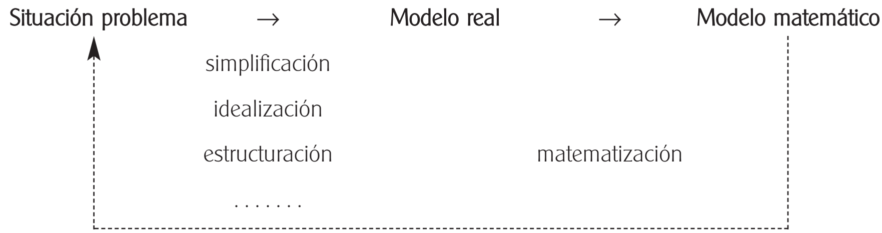
b) Por otro lado, la necesidad, en determinadas instituciones, de enseñar explícitamente la *modelización* como un contenido más, por lo general restringida a la relación de las matemáticas con alguna disciplina concreta, al servicio de un determinado campo profesional o de una formación científica especializada: ¿cómo conseguir que los alumnos desarrollen competencias de modelización en relación con su campo científico o profesional de especialización?

Al abordar estas cuestiones iniciales, se produjo un primer desarrollo de este dominio de investigación con la apertura de diferentes líneas de trabajo no disjuntas, aunque las describiremos aisladamente para facilitar su lectura.

Una primera línea, centrada en la búsqueda de "buenos" sistemas que modelizar y de "buenas" aplicaciones de las matemáticas. Trata de identificar, en el vasto universo de *sistemas* y de *aplicaciones*, los más adecuados para introducir al alumno en un proceso de modelización que le permita la adquisición del conocimiento matemático pretendido, o para adquirir la "capacidad" de modelizar. No se establece una fundamentación teórica sólida o, a lo sumo, ésta se deja en manos de otras disciplinas, como la pedagogía o la psicología.

Una segunda línea, centrada en cómo gestionar estos "buenos" sistemas y aplicaciones en los procesos de enseñanza/aprendizaje. Desde el comienzo, la noción de "modelización" se toma de las *matemáticas puras*, quedando resumida en el *ciclo de modelización*. Aunque existen diferentes formulaciones de éste, tal

Figura 1 Ciclo de modelización (Blum y Niss, 1991)



vez la más extendida sea la propuesta por Blum y Niss (1991), la cual sintetizamos en la figura 1. Hoy día, este tipo de investigación continúa y produce, basándose en la experimentación y en la reflexión (metodología muy próxima a la de la investigación-acción), buenos ejemplos de modelización y de aplicaciones de las matemáticas, listos para ser implementados en el aula.

Sin embargo, la evolución del dominio de investigación "modelización y aplicaciones" ha conducido a un creciente interés sobre los procesos de modelización. Como Niss (1999, p. 21) pone de manifiesto, *"there is no automatic transfer from a solid knowledge of mathematical theory to the ability to solve non-routine mathematical problems"*. En consecuencia, considera que tanto la resolución de problemas como la modelización tienen que convertirse en objetos explícitos de enseñanza y aprendizaje.

Esta afirmación puede ser considerada como el punto de partida de la investigación actual en modelización y aplicaciones centrada en la enseñanza explícita de la modelización, lo que implica una necesaria problematización de los procesos de modelización matemática en un intento de superar la *ilusión de transparencia* implícita en gran parte de las investigaciones.

Esta problematización de los procesos de modelización se produce desde dos ámbitos diferentes, no siempre disjuntos:

- *Problematización epistemológica*: necesidad de problematizar las características de las "situaciones reales" que permitan el desarrollo de un *proceso de modelización* con fines didácticos (cuestionamiento de que las "situaciones reales" posean, por sí solas, propiedades didácticas).
- *Problematización cognitiva*: necesidad de profundizar en el conocimiento de los procesos cognitivos activados por los estudiantes en la realización de tareas de *modelización* y de *aplicaciones*.

En particular, la problematización de los procesos cognitivos de los alumnos ha supuesto una inversión en la *problemática de la modelización*: puesto que el *análisis cognitivo* pone de manifiesto que la realización de *tareas de modelización y aplicaciones* supone la activación de procesos cognitivos complejos, surge la necesidad de hacer explícita la enseñanza de técnicas o destrezas específicas de modelización.

De esta manera, las dos problemáticas que hemos formulado como punto de partida convergen en una única, que denominaremos el "problema de la modelización" y que puede ser descrita en los siguientes términos:

> Π^D: ¿Cómo conseguir que los alumnos elaboren por sí mismos estrategias de modelización no rutinaria de sistemas, generalmente extramatemáticos?

Aunque existe una amplia variedad de investigaciones centradas en este problema de investigación, es posible estructurar, al menos en parte, este dominio de investigación a partir de los niveles de determinación introducidos anteriormente.

Así, una gran parte de la investigación actual *sitúa* la modelización en el *nivel temático*, dando lugar a la construcción de organizaciones matemáticas puntuales y aisladas. De manera general, podemos sintetizar el problema de investigación que abordan en los siguientes términos: *¿cómo actúa, o podría actuar, un sujeto cuando se enfrenta a la tarea de resolver un "problema real" concreto que implica la construcción de un modelo?* Es puntual en la medida en la que se considera un sistema aislado, generalmente de naturaleza extramatemática, sobre el que el alumno tiene que trabajar para construir un modelo que lo represente, obteniendo algún tipo de conclusión que tendrá que ser confrontada de nuevo con la situación original. Construido este modelo, el sistema ha perdido todo su interés, el modelo pasa a formar parte del *patrimonio matemático* del alumno y comienza un nuevo proceso no necesariamente vinculado con el anterior. A la hora de elegir o diseñar estos procesos de modelización, no se cuestiona la subdivisión de la matemática escolar en áreas y sectores ni tampoco los niveles superiores al disciplinar.

Junto a las investigaciones encerradas en el nivel temático, encontramos otras en las que el "problema de la modelización" está planteado en el nivel *disciplinar*. En este caso, la problemática se puede sintetizar en la siguiente cuestión: *¿Cómo conseguir que el alumno desarrolle destrezas o competencias generales de modelización?* Se trata de un planteamiento disciplinar en la medida en la que se formula de manera independiente del conocimiento matemático y de sus diferentes niveles de estructuración (áreas, sectores, temas). Paradójicamente, el estudiante debe desarrollar su *competencia modeladora* a través de actividades concretas de modelización que asumen una determinada subdivisión de la matemática escolar que no se considera problemática.

Muy rara vez podemos encontrar investigaciones relativas al problema de la modelización que se sitúen en los *niveles intermedios* (áreas y sectores) y, todavía menos, que abarquen diferentes áreas y sectores, posibilitando la articulación entre ellos.

Algunas líneas de investigación, como por ejemplo las "matemáticas realistas" (Realistic Mathematics Education),[3] suponen un intento de plantear el "problema de la modelización" en un nivel local. Al considerar las matemáticas como una actividad humana, más que como una red de conceptos, se interesan en diseñar *trayectorias* que permitan el surgimiento de diferentes modelos que posteriormente irán evolucionando. Así, la *heurística de la modelización emergente* supone partir de una situación "realista" para el alumno, en la cual éste pueda *actuar* (organizar, clasificar, estructurar, etc.), dando lugar a un primer *modelo de* su actividad matemática informal (*matematización horizontal*) y que luego iría evolucionando (abstracción, generalización, formalización, etc.) hacia un *modelo para* organizar situaciones relacionadas, así como otras nuevas, dando lugar a una actividad matemática de mayor nivel (*matematización vertical*).

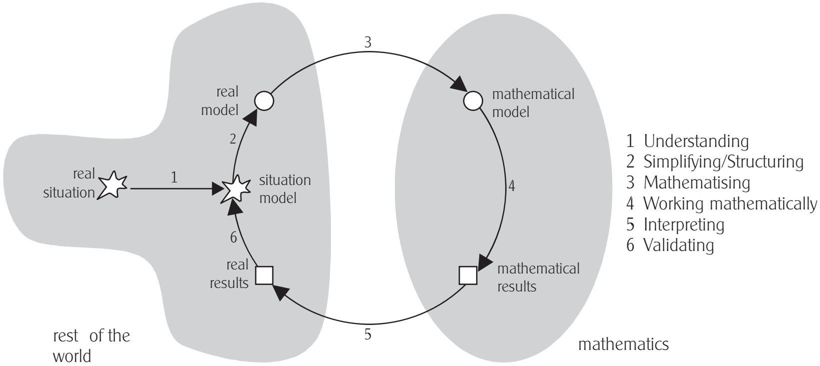
Tratar la modelización en los niveles intermedios (en el nivel del sector o del área) supondría considerar un *gran problema* o cuestión que requiera la necesidad de un *gran trabajo de modelización*, del que surgirá la siguiente subdivisión de la matemática escolar en temas y cuestiones.

Es importante destacar que, en la mayoría de las investigaciones desarrolladas en el campo de la "modelización y las aplicaciones", la descripción de los procesos de modelización se sigue realizando a partir del ciclo de modelización, *importada* de la *matemática sabia*, y permanece prácticamente inalterada (se trata de una noción *transparente*).

En algunos casos, la superación de esta *transparencia* se ha producido a través del cuestionamiento y la problematización de los procesos cognitivos activados por los sujetos en cada etapa de este ciclo, o bien en las transiciones entre etapas. En ocasiones, esto provoca el surgimiento de nuevas etapas, con el consiguiente enriquecimiento del *ciclo de modelización*. Ilustran perfectamente este fenómeno las descripciones del *ciclo de modelización* propuestas por Blum, la primera en la década de 1990 (figura 1), la segunda recientemente (Blum, 2005) (figura 2).

[3] Freudenthal (1973, 1991), Treffers y Goffree (1985), De Lange (1996).

Figura 2 Ciclo de modelización (Blum, 2005)



Aunque es innegable que se ha producido un gran avance, tampoco es menos cierto que los resultados obtenidos aún distan bastante de los deseados. Como Blum (2002, p. 150) expresa:

> While applications and modelling also play a more important role in most countries' classrooms than in the past, there still exists a substantial gap between the ideals of educational debate and innovative curricula, on the one hand, and everyday teaching practice on the other hand.

Es pues necesario seguir trabajando en el estudio y problematización de los procesos de modelización y en el papel que pueden desempeñar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

REFORMULACIÓN DE LA "MODELIZACIÓN MATEMÁTICA" EN LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

El Programa Epistemológico de Investigación de Didáctica de las Matemáticas (Gascón, 2003a), cuyo origen podemos situar en los primeros trabajos de Guy Brousseau en los años 1970, coloca la problematización del modelo epistemológico de las matemáticas en el corazón de la investigación didáctica. La hipótesis principal puede resumirse en los siguientes términos: todo *fenómeno didáctico* tiene un componente matemático esencial y, recíprocamente, todo *fenómeno matemático* tiene un componente didáctico esencial (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Desde este nuevo punto de vista, los *hechos didácticos* y los *hechos matemáticos* son inseparables, inaugurando una nueva vía de entrada a la investigación en didáctica de las matemáticas: la problematización del modelo epistemológico del conocimiento matemático.

La TAD se sitúa dentro del Programa Epistemológico[4] y postula que "gran parte de la actividad matemática puede identificarse (...) con *una actividad de modelización matemática*" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 51). Esto implica que la *modelización* no es sólo una dimensión de la actividad matemática, sino que la actividad matemática es, en esencia, una *actividad de modelización*.

Esta afirmación adquiere pleno sentido si, en primer lugar, la noción de *modelización* no queda limitada sólo a la "matematización" de situaciones extramatemáticas, esto es, cuando la modelización intramatemática es considerada como un aspecto esencial e inseparable de las matemáticas y, en segundo lugar, cuando se dote de un significado preciso a la *actividad de modelización* dentro del modelo general de la actividad matemática propuesto por la TAD.

Ahora bien, en el marco de la TAD (Bosch y Gascón, 2005), lo que es relevante no es la situación concreta propuesta para ser resuelta (salvo en situaciones de vida o muerte), sino lo que se podrá hacer luego con la solución obtenida. Así, los problemas importantes son aquellos que pueden reproducirse y desarrollarse en tipos de problemas más amplios y complejos. El estudio de estas *cuestiones fértiles* provoca la necesidad de construir nuevas técnicas y nuevas tecnologías que justifiquen y expliquen estas técnicas. En otros términos, la investigación debería centrarse en aquellas *cuestiones cruciales* que pueden generar un conjunto amplio y rico de organizaciones matemáticas. En ocasiones, estas *cuestiones cruciales* pueden tener un origen extramatemático pero, en otras ocasiones, pueden ser de naturaleza intramatemática.

El punto de partida relevante para el diseño de un *proceso de estudio* no debería ser el carácter más o menos real de las cuestiones iniciales, sino la posibilidad que éstas ofrezcan para crear un complejo articulado e integrado de organizaciones matemáticas que permita el desarrollo de una actividad matemática amplia en una determinada institución escolar y que tenga en cuenta las restricciones y condiciones impuestas por esta institución.

[4] El sentido que la TAD adjudica a "lo epistemológico" no sólo no se reduce al "contenido matemático", sino que, muy al contrario, amplía el ámbito y el alcance que se le da habitualmente a "lo matemático" y a la "epistemología de las matemáticas". En este sentido, pueden consultarse los trabajos de Chevallard (1990) (posfacio de la segunda edición de *La Transposition Didactique*) y de Gascón (1993) (donde se describen diversas ampliaciones de la epistemología clásica).

En resumen, proponemos reformular los *procesos de modelización*, en el marco de la TAD, como procesos de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente (puntuales → locales → regionales), que deben tener su origen en el cuestionamiento de las *razones de ser* de las organizaciones matemáticas que se desea reconstruir y articular. En este ámbito surgirán las *cuestiones cruciales* (para la comunidad de estudio) cuya respuesta deberá materializarse en una organización matemática regional.

Desde esta nueva perspectiva:

- Las nociones de *modelo* y *sistema* se amplían para ser consideradas como praxeologías.
- Los *procesos de modelización* dejarán de describirse sólo en términos del par *sistema-modelo* y a partir del *ciclo de modelización* para ser caracterizados en términos de *praxeologías* y de *vínculos entre praxeologías*.
- No tiene sentido considerar los *procesos de modelización* independientemente del resto de las actividades matemáticas, ni como *objetos* en sí mismos (para ser *enseñados*), ni como *medios* para la *enseñanza* y el *aprendizaje* de determinados conocimientos matemáticos.

Esta nueva interpretación de la *modelización* dentro del *programa epistemológico* de investigación en didáctica de las matemáticas supone una ruptura con la tradición de la "modelización y aplicaciones" desarrollada en los últimos 25-30 años desde la educación matemática. Sin embargo, esta ruptura no contradice los resultados obtenidos hasta el momento, sino que, en cierto sentido, los completa al introducir una nueva herramienta para estructurar los *procesos de modelización* y para integrarlos dentro del modelo epistemológico más general de la actividad matemática institucional.

La reformulación de los procesos de modelización que acabamos de enunciar constituye una nueva vía para identificar y proponer nuevos problemas didácticos y para abordarlos, como mostraremos en los siguientes apartados. Desde esta nueva perspectiva, la *modelización* deja de ser conceptualizada como un dominio particular de la investigación en didáctica (*modelling and applications*) para convertirse en un tema central en la identificación de fenómenos didácticos, en la formulación de problemas de investigación y en las respuestas tentativas que se propongan.

EL PROBLEMA DE LA DESARTICULACIÓN DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Actualmente, en muchos países (y en particular en España), los currículos de las instituciones escolares suelen estar estructurados en tres grandes secciones de contenidos: *conceptuales, procedimentales* y *actitudinales*. Cada una de estas secciones se concreta en una lista, generalmente poco estructurada, de los diferentes tipos de contenidos:

- Los contenidos *conceptuales* surgen como respuesta a la cuestión: ¿qué obras matemáticas considera la *sociedad* que hay que estudiar en la escuela?
- Los *procedimentales* intentan responder a las cuestiones del tipo: ¿hasta qué punto hay que "entrar" en estas obras? ¿Qué es lo que se debe poder hacer con ellas?
- Los *actitudinales*, por su parte, recogen cómo se deben considerar las matemáticas dentro del conjunto de obras de la sociedad, así como ciertos aspectos de la actividad matemática que no pueden describirse como tareas o procedimientos.

Además, los currículos de matemáticas están estructurados en un conjunto de *áreas* y éstas se estructuran en *sectores*. Si bien es cierto que el currículo asume desde sus inicios que todos estos contenidos forman parte de una organización mayor, las *matemáticas*, no establece cuál es la manera de articular estos contenidos para proceder a su estudio en las instituciones escolares, más allá de algunas consideraciones generales y un tanto vagas. De modo general, se atribuye a la *resolución de problemas* y a la *aplicación de las matemáticas en contextos "reales"* un presunto papel articulador de los diferentes contenidos y de las diferentes *áreas* y *sectores*. Por ejemplo, en los documentos curriculares vigentes en la actualidad en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se establece que:

> Los contenidos se presentan organizados en cinco núcleos: Números y Medidas, Álgebra, Geometría, Funciones y su Representación Gráfica y Tratamiento de la Información Estadística y del Azar.
>
> En cada uno de ellos se formula de manera integrada los distintos tipos de contenidos: procedimientos específicos, formas de expresión y representaciones peculiares, conceptos, hechos, hábitos y actitudes. También se indican situaciones o problemas de la vida diaria en los que aparecen.

> El proceso de enseñanza y aprendizaje ha de integrar (como simultáneos o complementarios) contenidos relativos a los distintos ámbitos del conocimiento matemático. A partir de unas mismas experiencias, situaciones problemáticas o actividades, se pueden elaborar de forma conjunta conocimientos relativos a magnitudes, aritméticos, geométricos, algebraicos, estadísticos o probabilísticos (CECJA, 2002, pp. 146-147).

Así, la tarea de la escuela, en general, y de los profesores, en particular, puede describirse en los siguientes términos: crear las condiciones "óptimas" para que los alumnos puedan *tener acceso* a estas *obras matemáticas*. Para tal fin, usarán una serie de *dispositivos didácticos*.[5]

El problema crucial reside en la estructuración y organización del conjunto de contenidos expuesto en el currículo, esto es, en la elaboración de un *programa de estudios* para los alumnos. A este problema nos referiremos como el *problema de la elaboración del currículo*, que no puede ser abordado de manera independiente de la estructuración, en determinadas *áreas* y *sectores*, impuesta por las *administraciones educativas* ni de las restricciones que provienen de la institución escolar.

Sin embargo, y en consonancia con la *respuesta psicopedagógica* dominante (Gascón y col., 2004), se considera que el *problema de la elaboración del currículo* puede ser abordado desde el punto de vista de la *enseñanza*, de manera relativamente independiente del conocimiento científico que sea objeto de ella. Es decir, se supone que *lo problemático* está en:

- la *selección de los contenidos*, su *secuenciación* y *temporalización*;
- la *metodología de enseñanza*, interpretada como el conjunto de "gestos" que debe hacer el profesor para que el alumno *aprenda* los contenidos pretendidos.

[5] "En general, un *dispositivo escolar* será cualquier 'mecanismo' dispuesto para obtener determinados fines educativos (...) En la medida en que cada uno de estos dispositivos incide sobre la estructuración y el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas, funcionando como un *dispositivo de ayuda al estudio de las matemáticas*, diremos que se trata, además, de un *dispositivo didáctico* (en el sentido didáctico-matemático)" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 277). Son *dispositivos didácticos*, entre otros: la "clase de matemáticas", el "libro de matemáticas", los "exámenes de matemáticas", las preguntas que hace el profesor en "clase de matemáticas", etcétera.

Todo ello sin un cuestionamiento explícito del saber matemático, asumiendo pues que existe una manera relativamente *universal* e *incuestionable* de describir las matemáticas escolares y organizar los conocimientos matemáticos, y que dicha forma está plasmada en la distribución en *áreas* y *sectores* antes mencionada. Como además ésta viene impuesta por las *administraciones educativas*, el papel de los autores de libros de texto y de los profesores queda limitado a la selección de las *cuestiones* que proponen para ser estudiadas en la escuela y de los *temas* en torno a los cuales se agrupan estas cuestiones.

Desde el *programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas se* intenta deconstruir esta respuesta "pedagógica", problematizando el modelo epistemológico de las matemáticas, en vez de considerar que éste es transparente y está establecido de una vez por todas.

> El punto de vista de la didáctica propone que el *problema de la elaboración del currículo* (...) tiene un *componente matemático esencial*. No se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo (...) Se trata de una verdadera *reconstrucción creativa* de las obras que forman el currículo (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 127).

En este marco es donde tiene sentido el planteamiento del *problema de la articulación del currículo de matemáticas*, que puede describirse inicialmente en los siguientes términos:

> ¿Cómo organizar la *enseñanza escolar de las matemáticas* de manera que provoque la articulación de todos los tipos de contenidos: conceptuales, procedimentales y actitudinales? ¿Cómo conseguir, en definitiva, que los *conocimientos matemáticos aprendidos por los alumnos* no se reduzcan a un conjunto completamente desarticulado de técnicas más o menos algorítmicas y carentes de sentido?

Esta primera formulación del *problema de la articulación* tiene más las características de un *problema docente* que de un *problema didáctico* (o de *investigación didáctica*), puesto que, de acuerdo con la caracterización de los "problemas docentes", introducida por Gascón (1999): *a)* está formulado usando las nociones existentes en las instituciones escolares (asumiendo más o menos explícitamente las *ideas dominantes* de éstas); *b)* está planteado como un problema de los sujetos de las instituciones más que como un problema del *Sistema de En-*

señanza de las Matemáticas (que como tal, es bastante transparente y no se cuestiona); *c)* asume que existe una forma universal e incuestionable de describir el conocimiento matemático (la desarticulación se plantea, pues, en referencia a esta articulación *natural, intrínseca, eterna* e *inmutable* del conocimiento matemático), y *d)* se suele restringir "lo matemático" al conocimiento matemático del alumno (a aquello que debe aprender) y "lo didáctico" a los procesos que ocurren en el aula.

Sin embargo, es posible reformular este *problema docente* como un *problema didáctico* utilizando las herramientas de análisis didáctico propuestas por la TAD:

> **Problema de la articulación de la matemática escolar:** ¿Cómo diseñar organizaciones didácticas que permitan articular el currículo de matemáticas tanto entre los temas y áreas de una misma etapa como entre las diferentes etapas educativas? Y, en particular, ¿qué características específicas debería poseer una organización didáctica escolar para poder retomar los contenidos antiguos, incluso los estudiados en etapas educativas anteriores, cuestionarlos, desarrollarlos e integrarlos en organizaciones matemáticas más amplias y complejas?

Como cualquier problema de investigación didáctica, presenta dos caras que, de hecho, son inseparables (Gascón, 2005):

a) Se trata de un *problema de ingeniería matemática,* relativo al *análisis* de las organizaciones matemáticas presentes en el currículo y a la *construcción* de organizaciones matemáticas. Respecto al *análisis,* se preguntará sobre la naturaleza de las limitaciones e insuficiencias de estas organizaciones matemáticas para generar y dar sentido a organizaciones matemáticas más *amplias y complejas,* que superen el *nivel temático.* Respecto a la *construcción,* su objeto será analizar la manera de completar las organizaciones matemáticas escolares existentes y proponer formas de articularlas entre sí.

b) Se trata de un *problema de ingeniería didáctica,* relativo a la construcción de organizaciones didácticas que den lugar a la reconstrucción de organizaciones matemáticas *amplias y complejas* y que permitan superar el "encierro en los temas", a fin de articular los contenidos matemáticos de cada etapa educativa y entre diferentes etapas.

En las investigaciones desarrolladas en el marco de la TAD, han sido numerosos los trabajos que, de una u otra manera, han abordado este problema didáctico general: la de Gascón (2001b, 2005) sobre la desarticulación entre la *geometría sintética* de la Educación Secundaria Obligatoria y la *geometría analítica* del Bachillerato; la de Bolea (2002), Bolea, Bosch y Gascón (2001a, 2001b, 2003) sobre el *álgebra escolar,* la de Fonseca (2004) centrada en la transición entre *estudiar matemáticas* en el Bachillerato y *estudiar matemáticas* en la Universidad o la de García (2005), García y Ruiz Higueras (2006) sobre el estudio de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria Obligatoria.

ARTICULACIÓN DEL PROCESO DE ESTUDIO DE LAS RELACIONES ENTRE MAGNITUDES

El problema de investigación que hemos abordado en García (2005) tiene como punto de partida el *problema docente* del análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la *proporcionalidad entre magnitudes* en la Educación Secundaria Obligatoria. Un primer "análisis espontáneo"[6] de los currículos oficiales, así como de los libros de texto vigentes en la actualidad, muestra una fuerte atomización del proceso de estudio que se propone. Este primer *hecho empírico* permite adelantar que el *problema de la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad* puede ser reformulado desde la didáctica como una manifestación del *fenómeno de la desarticulación de las matemáticas escolares.*

Desde el *programa cognitivo* de investigación en didáctica de la matemática han sido múltiples las investigaciones que han abordado el *problema de la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad.* Entre otras, Harel y Behr (1989), Hart (1988), Karplus, Pulos y Stage (1981, 1983a, 1983b), Lamon (1991), Noelting (1980a, 1980b), Singer y Resnick (1992), Tourniaire (1986), Tourniaire y Pulos (1985). Aunque los marcos teóricos y las metodologías empleadas son muy diversos, en la mayoría de las investigaciones se observa un *aislamiento de la relación de proporcionalidad respecto a otro tipo de relaciones entre magnitudes.* De hecho, gran parte de estas investigaciones tienen como objeto de estudio el "razonamiento proporcional" del sujeto.

[6] Por "análisis espontáneo" del currículo y de los libros de texto nos referimos a aquel que se limita a observar y describir los contenidos que aparecen, y su distribución, sin usar ningún tipo de herramienta teórica de análisis didáctico. No pretende ser explicativo, sino meramente descriptivo. Puede interpretarse como una primera toma de contacto con el *campo empírico* que será objeto de investigación.

Sin embargo, el *programa epistemológico* despersonaliza la problemática didáctica y toma como objeto primario de investigación la actividad matemática institucional. Asume como hipótesis principal que no sólo *lo matemático* es *denso* en *lo didáctico,* sino también que, recíprocamente, toda *actividad matemática* supone una *actividad didáctica* o actividad de estudio de las matemáticas. En otros términos, se postula la continuidad e incluso la *indisolubilidad* entre los *fenómenos didácticos* y los *fenómenos matemáticos*. Amplía pues de manera radical la problemática didáctica para incluir en ésta tanto el propio *saber matemático* como el *sistema de enseñanza* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Proponemos pues, partiendo de trabajos previos como los de Bosch (1994), Bolea (2002) y García y Ruiz Higueras (2002, 2006), reformular el problema docente de la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en términos del problema de investigación de la articulación del estudio de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria Obligatoria.

Problema de la articulación del proceso de estudio de las relaciones entre magnitudes en la Educación Secundaria

El problema de investigación que nos proponemos abordar puede ser formulado como sigue:

> ¿Cómo diseñar organizaciones didácticas que permitan articular el conjunto de relaciones entre magnitudes propuestas en el currículo de matemáticas, tanto entre las áreas y sectores de una misma etapa como entre las diferentes etapas educativas?
>
> ¿Qué características específicas debería poseer una organización didáctica escolar para poder retomar los contenidos antiguos en torno a los *sistemas de variación,* incluso los estudiados en etapas educativas anteriores, cuestionarlos, desarrollarlos e integrarlos en organizaciones matemáticas más amplias y complejas?

Además, postulamos que las *razones de ser* de las "relaciones entre magnitudes" en la Educación Secundaria tienen su origen en la *problemática de la modelización de sistemas* en los que dos o más magnitudes son susceptibles de estar relacionadas entre sí. Por consiguiente, para continuar la investigación, será necesario construir, explícitamente, un modelo epistemológico de los sistemas de variación entre magnitudes que actúe como referente para:

- Observar las organizaciones matemáticas propuestas, en la actualidad, para ser reconstruidas en la Educación Secundaria Obligatoria.
- Construir una nueva organización matemática que permita el desarrollo de un *proceso de modelización* (en el sentido previamente definido por la TAD), capaz de generar un conjunto de praxeologías articuladas e integradas en torno a los *sistemas de variación* en la Educación Secundaria Obligatoria.

UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA EN TORNO A LA *MODELIZACIÓN DE SISTEMAS DE VARIACIÓN DE MAGNITUDES*

De manera general, en todo *sistema de enseñanza de las matemáticas* podemos encontrar un *modelo epistemológico dominante,* a menudo implícito, que se "impone" a los sujetos de la institución y que tiene una importancia didáctica crucial, puesto que determina lo que se entiende por "enseñar y aprender matemáticas" dentro de dicha institución.

Desde el *programa epistemológico,* se postula la necesidad de construir explícitamente un *modelo epistemológico de referencia* (en adelante MER) del conocimiento matemático objeto de investigación, que necesariamente tendrá que ser provisional y deberá estar abierto a posibles modificaciones, fruto de los resultados obtenidos. Asimismo, este MER será imprescindible para estudiar el *saber matemático* antes de que se transforme para ser enseñado (*transposición didáctica*).

En García (2005) hemos propuesto un MER que parte del cuestionamiento y la caracterización de la variación de magnitudes. Para ello, y teniendo en cuenta las restricciones institucionales que provienen de la Educación Secundaria Obligatoria, hemos optado por restringirnos a relaciones entre dos magnitudes M y M', ambas discretizadas ($\{a_1, a_2,...a_i,...\}$ representa el conjunto de cantidades de la magnitud M y $\{a'_1, a'_2,...a'_i,...\}$ las cantidades correspondientes en M').

Consideramos, además, que el punto de partida es un conjunto de cantidades de la primera magnitud en progresión aritmética (de diferencia $k \in M$) y cuestionamos el tipo de variación de las cantidades correspondientes de la segunda magnitud. De esta manera, hemos introducido diferentes *tipos de variación* (o *condiciones de variación*). Esbozamos algunos a continuación:[7]

[7] Una descripción más detallada puede consultarse en García (2005).

- *Condición de equidad*: toda progresión aritmética $\{a_i\}$ de elementos de M de diferencia k se transforma en una progresión aritmética de elementos de M' de diferencia k'.

$$\forall k \in M,\ \exists k' \in M' / \text{si } \Delta a_i = a_{i+1} - a_i = k \Rightarrow \Delta a'_i = a'_{i+1} - a'_i = k'$$

- *Condición de linealidad*: más restrictiva que la anterior; implica que no sólo toda progresión aritmética de cantidades de M se transforma en una progresión aritmética de cantidades de M', sino también que toda progresión geométrica de cantidades de M se transforma en una progresión geométrica de cantidades de M' de la misma razón.

$$\forall k \in \Re, \text{ si } \nabla a_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} = k \Rightarrow \nabla a'_i = \frac{a'_{i+1}}{a'_i} = k$$

  O bien, formulada en términos continuos: si $(a, a') \in M \times M'$ es un *estado* del sistema (par de cantidades relacionadas entre sí), entonces también (ka, ka') y $(k^{-1}a, k^{-1}a')$ son estados del sistema ($\forall k \in \Re - \{0\}$).
- *Condición de diferencias constantes de orden n:* toda progresión aritmética de diferencia k se transforma en una progresión con diferencias constantes de orden n iguales a k'

$$\forall k \in M, \exists k' \in M' / \text{ si } \Delta a_i = a_{i+1} - a_i = k \Rightarrow \Delta^n a'_i = \Delta^{n-1} a'_{i+1} - \Delta^{n-1} a'_i = k'$$

De esta manera, la *relación de proporcionalidad directa* queda reformulada como una relación entre dos magnitudes caracterizada por una variación bajo la *condición de linealidad* y aparecen otros tipos de relaciones (afines, cuadráticas, exponenciales, de proporcionalidad inversa), según sea el tipo de variación que caracteriza a la relación.

En el MER construido, se propone el estudio integrado de sistemas en los que las cantidades de magnitud son susceptibles de variar según diferentes *condiciones* (como las enunciadas anteriormente u otras posibles) y para los que se construyen, amplían e integran diferentes praxeologías en torno a los distintos tipos de variación, conformando una organización matemática regional articulada en torno a la *teoría de las funciones reales de variable real*.

En García (2005) hemos usado este MER como una herramienta de análisis didáctico para caracterizar las organizaciones matemáticas propuestas por algunos textos escolares para ser reconstruidas en la actual Educación Secundaria Obligatoria española en torno al estudio de las relaciones funcionales.

A continuación, esbozaremos el *proceso de estudio* que hemos elaborado a partir de este MER como respuesta al *problema de la articulación de las relaciones funcionales* y que ha sido construido como un *proceso de modelización* (articulación e integración de praxeologías de complejidad creciente).

UN PROCESO DE MODELIZACIÓN EN TORNO A LOS SISTEMAS DE VARIACIÓN: LOS "PLANES DE AHORRO"

Toda *actividad de estudio e investigación* parte de una cuestión generatriz Q que permite hacer emerger un tipo de problemas y una técnica de resolución de dichos problemas, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se ha llevado a cabo (Chevallard, 1999).

Si esta cuestión generatriz Q es lo suficientemente fecunda, dará lugar a nuevas cuestiones problemáticas que generarán nuevos tipos de tareas, cuya respuesta producirá una sucesión de organizaciones matemáticas articuladas entre sí en un periodo de tiempo relativamente largo, esto es, un *recorrido de estudio e investigación* (REI).

En el comienzo de la actividad en cualquier campo de las matemáticas, la cuestión fundamental que conviene plantearse es la de las *razones de ser* que han motivado la creación y desarrollo de este campo y que justifican su presencia en los programas de estudios. En el caso de las "funciones", si bien no es posible formular con demasiada precisión una cuestión generatriz única, es evidente que el origen de las posibles cuestiones se encuentra en el *estudio de la variación*, esto es, en el estudio de *situaciones* en las que dos o más magnitudes varían, dependiendo unas de las otras. Provisionalmente, enunciamos la siguiente *cuestión generatriz*:

> $\boldsymbol{Q_i}$**:** Ante una *situación* S_i en la que dos o más magnitudes son susceptibles de estar relacionadas, variando las unas respecto de las otras, ¿qué características tiene esta variación?

Lo que nos remite directamente a una cuestión aún más general, a partir de la cual se genera un tipo de tareas que permita el desarrollo de un REI:

Q_{var}: ¿Cuál criterio se utiliza para definir diferentes "tipos de variación"?

Entendemos el término *sistema* en el sentido de una praxeología o al menos de un conjunto de componentes praxeológicos que englobe como mínimo dos magnitudes y algún componente tecnológico susceptible de dotar de sentido a una posible relación entre ellas. El carácter intramatemático o extramatemático de este componente tecnológico vendrá determinado, en gran medida, por el *entorno* donde se ubica el *sistema*, el cual estará a su vez fuertemente condicionado por restricciones provenientes de la institución donde se desarrollarán el proceso de estudio y los diferentes niveles de determinación.

En el REI que hemos diseñado, proponemos ubicar los sistemas en un entorno de tipo *económico-comercial* (construcción de "programas" o "planes de ahorro"), puesto que:

- constituye un medio familiar para el alumno de la institución Enseñanza Secundaria que nos permitirá desarrollar una actividad matemática suficientemente amplia, que será descrita más adelante;
- se trata de un ámbito de la sociedad actual que la *escuela* debería tomar más en serio si realmente asume su función de servir de instrumento para "mejorar la vida de los ciudadanos".[8]

Además, en coherencia con el *modelo epistemológico de referencia* esbozado anteriormente, este entorno permite dotar de sentido a la discretización de las variables.

Estas primeras delimitación y ubicación del sistema constituyen un *grado* 0 o paso previo en la construcción de dicho sistema. Sin embargo, aún quedan muchas decisiones por tomar, lo que dará lugar a un *grado* 1 y a un *grado* 2 de construcción y delimitación del sistema.

El *grado* 1, cuya responsabilidad ha sido asumida por los investigadores, es el momento de delimitar las magnitudes que se pondrán en juego y formular la cuestión generatriz que lance el proceso de estudio del conjunto de praxeo-

[8] Chevallard (2001b) considera que la *epistemología escolar* dominante en la actualidad se caracteriza por eliminar las "razones de ser" de las praxeologías propuestas para ser estudiadas en la escuela. De esta manera, se produce un *fenómeno de monumentalización* de estas praxeologías, que son llevadas a la escuela como objetos ya creados, valiosos por sí mismos, a los que se *invita* al alumno a *visitar*. Pero si se pretende que la enseñanza obligatoria sea un medio, entre otros, para "mejorar la vida de los ciudadanos", es imprescindible modificar dicha epistemología escolar para dar cabida a las "razones de ser" de las OM estudiadas.

logías deseadas. En nuestro caso, identificamos, como variables, las siguientes magnitudes:

- $V_1 \rightarrow$ la duración del "plan de ahorro" (*PA* en adelante) y la distribución temporal de los diferentes plazos;
- $V_2 \rightarrow$ la cantidad de dinero acumulada en cada plazo;
- $V_3 \rightarrow$ la cantidad de dinero aportada en cada plazo (variación de V_2 respecto de V_1).

Suponemos, además, que la relación entre las variables V_1 y V_2 es unívoca, es decir, que para cada medida de una cantidad de la primera magnitud, existe sólo una cantidad de la segunda magnitud relacionada con ella. Otras condiciones sobre la *construcción* del sistema harían que las propiedades de éste pudiesen variar de manera significativa.

Esta primera delimitación del sistema es suficiente para plantear una cuestión generatriz capaz de generar el REI y, en especial, para suscitar la necesidad de un *segundo grado* de construcción del sistema que formará parte de la actividad matemática que debe desarrollar el alumno. Esta cuestión generatriz puede ser enunciada de la siguiente manera:

> Q_a: ¿Cuáles criterios se utilizan para planificar un "plan de ahorro" concreto PA_i?

Esta cuestión es una *cuestión crucial,* puesto que:

- su generalidad lleva implícita la necesidad de un *segundo grado de estructuración,* que ahora forma parte de la tarea en sí y que será responsabilidad de la comunidad de estudio;
- es capaz de generar una actividad matemática a partir de un *medio matemático* relativamente limitado (*técnicas aritméticas elementales*), y que forma parte del *medio matemático* de un alumno de la institución donde se ubicará el REI (segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, 14-16 años);
- permite construir y simular diferentes planes de ahorro que, en principio, surgirán como praxeologías puntuales. Provoca, además, la emergencia de nuevas cuestiones problemáticas en torno a ellas, que serán el verdadero motor del REI.

Así, la comunidad de estudio tendrá la responsabilidad de:

1. Elegir un primer estado: comenzar en un instante determinado y con una cierta cantidad de dinero. Este estado inicial adquiere un carácter provisional y será revisable en cada momento y susceptible de ser modificado. Este primer estado comienza a desempeñar el papel de un parámetro de la situación.
2. Decidir cómo se van a ir generando los próximos estados, esto es, el tipo de variación que caracterizará al sistema. Por ejemplo, fijando una distribución uniformemente espaciada de los plazos (a diario, semanalmente, etc.) y decidiendo cuál ley seguirá la entrega de cuotas en cada plazo.[9]
3. Simular el sistema, esto es, construir un conjunto de estados lo suficientemente amplio como para permitir que se desarrolle el trabajo experimental necesario para el estudio.

De esta manera, y al menos *a priori*, consideramos que la cuestión generatriz no constituye una *cuestión muerta*, entre otros motivos y como veremos más adelante, puesto que será capaz de generar una actividad de construcción matemática amplia y compleja, superando ampliamente la actividad matemática *reducida* y *tradicional* en el estudio de las dependencias funcionales dominante en la mayoría de los instituciones españolas donde se imparte la Educación Secundaria.

Aunque la libertad aún es grande, es de esperar que surjan planes de ahorro con distribuciones temporales uniformemente espaciadas y entrega de cuotas según una *ley recurrente de orden uno*, que darán lugar a diferentes "planes de ahorro". Entre otros:

- "Planes de ahorro" de variación *equitativa* (*Eq*): en cada plazo se entrega una cantidad fija *C*.
- "Planes de ahorro" de variación *acumulativa con cuota creciente*: en cada plazo se entrega una cuota mayor que la depositada en el plazo anterior:
  - Var^1_{Ac}: en el primer plazo se entrega una cantidad *C*, y en cada plazo se entrega lo que se depositó en el plazo anterior más *C* (así, en el plazo

[9] Esta tarea se puede realizar de múltiples formas. Sin embargo, consideramos apropiadas, en relación con las restricciones institucionales y con la actividad matemática que se desea desarrollar, las decisiones que toman la forma de una *recurrencia de orden 1: si en el plazo* n *entregué una cantidad* C_n, *en el plazo* $n + 1$ *entregaré otra cantidad* C_{n+1} *relacionada con* C_n *de la misma forma que ésta lo estuvo con* C_{n-1}.

1 se entrega C, en el plazo 2 se entrega $C + C$, en el plazo 3 se entrega $2C + C$, etcétera).

- Var^2_{Ac}: en el primer plazo se entrega una cantidad C, y en cada plazo se entrega un múltiplo de factor constante ($k > 1$) de la cantidad que se entregó en el plazo anterior (así, en el plazo 1 se entrega C, en el plazo 2 se entrega $k \cdot C$, en el plazo 3 se entrega k^2C, etcétera).

DESARROLLO DEL RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN "LOS PLANES DE AHORRO"

El REI parte de la simulación de planes de ahorro, según diferentes tipos de variación, es decir, se empieza eligiendo el número de cuotas y la cuantía de los parámetros iniciales y calculando las cantidades acumuladas en cada plazo hasta obtener la cantidad final ahorrada.

Para gestionar el *momento de primer encuentro*, propusimos la siguiente formulación de la cuestión *generatriz*:

> Q_A: "Deseamos planear con tiempo el viaje de fin de curso, para lo que tenemos que decidir un plan de ahorro que nos permita reunir una cantidad suficiente de dinero. Aunque no sabemos aún el precio exacto del viaje, podemos hacer una estimación de la cantidad de dinero que necesitamos y comenzar a tomar decisiones sobre los diferentes plazos de entrega, las diferentes cantidades por entregar en cada plazo, etc. Por supuesto, no se trata de decidir hoy cuánto dinero hay que entregar y cómo, sino de empezar a trabajar sobre ello, con la intención de anticiparnos al final del curso y a las necesidades que tendremos cuando sepamos el precio exacto del viaje."

Formulada la cuestión, se abre un abanico de posibles decisiones, entre ellas, el número de cuotas y su distribución temporal, la existencia o no de una cuota inicial y la evolución de la cuota a lo largo del periodo de ahorro. Es de prever, y de hecho así ocurrió en las experimentaciones realizadas, que los alumnos formulen en primer lugar condiciones de ahorro de tipo equitativo. Se puede optar por trabajar sobre este tipo de plan de ahorro y dejar para más adelante otros tipos de variación o, si se desea, trabajar primero sobre diferentes condiciones para la variación de la cuota y luego desarrollarlas.

En cualquier caso, una vez decidido un tipo de variación (que no tiene por qué ser el mismo para todos los alumnos), surge de manera "natural" una primera tarea, que consiste en poner a prueba nuestro plan de ahorro (determinando las cantidades ahorradas en diferentes plazos) y observar qué ocurre. En algunos casos, en pocos plazos se obtiene una cantidad ahorrada muy alta; en otros, tras numerosos plazos la cantidad ahorrada es insuficiente. Este tipo de retroalimentaciones a partir de la situación son las que provocarán la modificación de las cantidades fijadas inicialmente y la realización de nuevas simulaciones. Este primer tipo de tareas lo hemos denominado "tareas de simulación" ($T_{\text{simulación}}$) y son las que provocan la transición hacia el *momento exploratorio* y su desarrollo.

La realización de esta tarea conduce a la construcción de un conjunto de técnicas aritméticas sencillas ($\tau_{\text{aritmética}}$) que, si se desea, pueden ser programadas usando una herramienta informática como una hoja de cálculo. Por ejemplo, aquellos alumnos que estén trabajando sobre planes de ahorro con *cuota creciente* (tipo Var^1_{Ac}) pondrán en funcionamiento diferentes variantes de una *técnica aritmética* (τ^1_{Ac}) que podemos resumir, de modo general, como sigue:

τ^1_{Ac}: Según Var^1_{Ac}, en cada plazo se aporta lo mismo que en el plazo anterior, más C.

x *(meses)*	0	1	2	3	4	5
y (euros)	C_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

$+ C \qquad + (C + C) \qquad + (2C + C)$ ....

De esta manera, para cada tipo de variación se construye una primera praxeología, que es puntual, puesto que está generada por una única técnica (con alguna pequeña variación), y que hemos denominado, según el tipo de variación: $PA(Eq)$, $PA(Var^1_{Ac})$, $PA(Var^2_{Ac})$, ...

La actividad matemática que es posible realizar con cada una de estas praxeologías puntuales es limitada. Esta limitación se hace más evidente cuando se desea, no sólo construir estados del sistema (simulación), sino también controlar el sistema (en el sentido de tomar decisiones sobre sus parámetros), esto es, tomar decisiones que nos permitan prever y anticipar su comportamiento y construir sistemas "a la medida" según distintas necesidades de ahorro (tareas que hemos denominado $T^{I}_{control}$, $T^{II}_{control}$, $T^{III}_{control}$, según las cantidades que se utilicen como parámetros y como incógnitas). También muestran limitaciones para la realización de tareas relativas a la comparación entre sistemas.

Estas tareas pueden estar planteadas dentro de un plan de ahorro determinado, pero también pueden mezclarse con "planes de ahorro" caracterizados por otro tipo de variación. La posibilidad de generar de manera casi inmediata representaciones gráficas, junto con las tablas de estados que proporciona Excel, generan un universo fecundo donde se pueden comparar diferentes tipos de variación, produciéndose, al menos en parte, una actividad matemática integrada y articulada en torno a diferentes sistemas de variación.

Por ejemplo, en la realización de *tareas de control y comparación* entre "planes equitativos" y "acumulativos de cuota creciente", es de esperar que los alumnos emitan juicios, todavía no muy exactos, respecto a posibles decisiones sobre los parámetros en relación con la evolución relativa de ambos planes. Por ejemplo: "si deseamos que en un cierto número de cuotas, un 'plan equitativo' ahorre la misma cantidad que un plan 'acumulativo creciente', será necesario que el primero tenga una cuota más alta o, en su defecto, que comience con una cantidad inicial mayor", o bien, "los planes acumulativos crecientes crecen más rápido que los equitativos". Se trata de posibles elementos del discurso tecnológico-teórico que es denso a lo largo de todo el proceso.

Las limitaciones de las *técnicas aritméticas* (al principio, elegirán las cantidades iniciales al azar y procederán por ensayo-error, pero pronto advertirán la dificultad de obtener la cantidad final deseada) provocan la necesidad de ampliar estas OM puntuales a otras locales en las que se pueda disponer de instrumentos que permitan controlar y anticipar el comportamiento del sistema, así como comparar diferentes sistemas: $OM_L(Eq)$, $OM_L(Var^1_{Ac})$, $OM_L(Var^2_{Ac})$, ... Para ello, la comunidad de estudio tendrá que trabajar sobre cada tipo de ahorro, a fin de construir *modelos algebraicos* ($T_{\text{mod\_alg}}$) que permitan caracterizar los estados del sistema y relacionarlos con los parámetros iniciales. Corresponde a un *momento del trabajo de la técnica* en el que las *técnicas aritméticas* evolucionan hacia una nueva representación de los estados del sistema. El hecho de que los diferentes tipos de variación estén formulados como recurrencias de orden 1 permite la construcción de una técnica común ($\boldsymbol{\tau}_{rec}$), que podemos describir esquemáticamente de la siguiente manera: *partir de la cantidad ahorrada en un plazo n* (y_n) *y trabajar sobre ella para irla expresando en función de las cantidades anteriores hasta llegar a las cantidades iniciales* (parámetros del sistema).

Por ejemplo, para planes de ahorro con variación *acumulativa de cuota creciente* tipo Var^1_{Ac}, se puede describir, de manera general, como sigue:

τ_{rec}:
$y_0 = C_0$; $y_1 = C_0 + C$; $y_2 = y_1 + 2C = C_0 + C + 2C$; $y_3 = y_2 + 3C =$
$C_0 + C + 2C + 3C$
. . . .

$$y_n = y_{n-1} + nC = C_0 + \sum_{k=1}^{n} k \cdot C$$

Y puesto que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, se deduce que $y_n = C_0 + \frac{n(n+1)}{2}C$, teniendo en cuenta que el tiempo está discretizado y que n representa cada plazo de ahorro. Haciendo un cambio de variable ($n \to x$), extendiendo esta última al conjunto de los números reales y operando en la expresión, se deduce el *modelo algebraico*: $y = f(x) = \frac{C}{2}x^2 + \frac{C}{2}x + C_0$.

De nuevo tienen que ponerse a prueba el alcance y la validez de este *modelo* para generar técnicas que permitan controlar y anticipar el funcionamiento de cada plan de ahorro, así como comparar planes de ahorro entre sí, tanto entre aquellos sujetos al mismo tipo de variación como entre planes que evolucionan bajo condiciones diferentes.

El desarrollo del recorrido diseñado y experimentado queda sintetizado en el esquema de la figura 3.

Donde hemos designado por τ_{alg} las técnicas que se construyen a partir de la modelización algebraica de los planes de ahorro para abordar las tareas de control y comparación.

Así, el trabajo sobre cada tipo de variación y la comparación y el control de sistemas con diferentes tipos de variación dan lugar a la construcción, ampliación e integración de un conjunto de praxeologías que sintetizamos en el esquema de la figura 4.

Figura 3 Esquema del Recorrido de Estudio e Investigación “Los planes de ahorro”

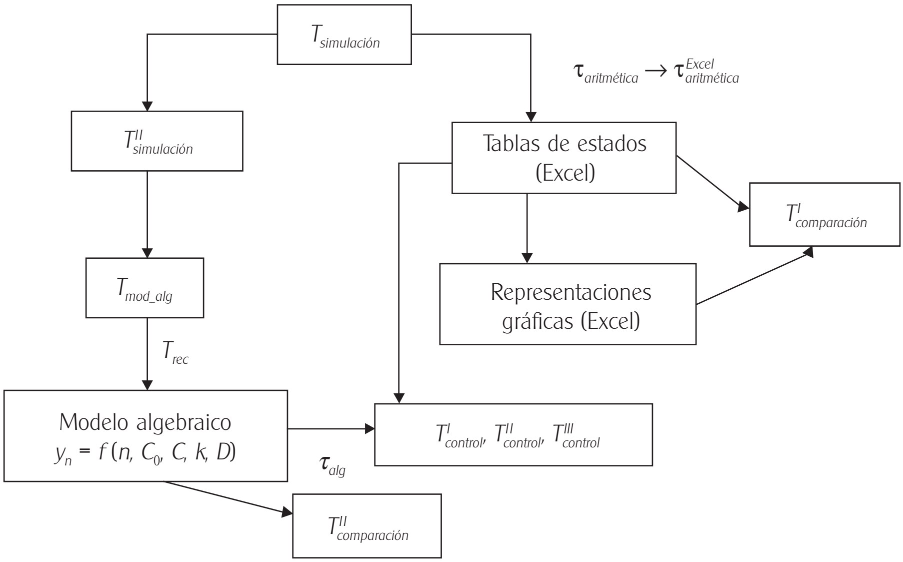
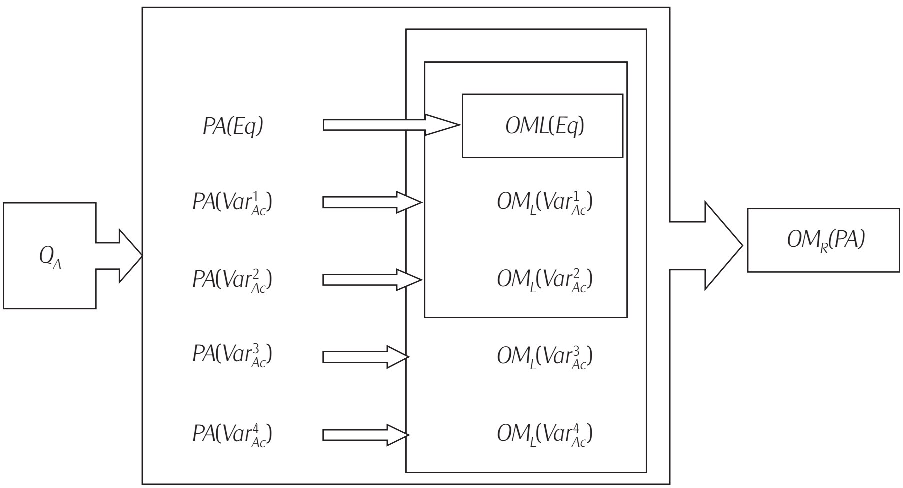


Figura 4 Integración y articulación de praxeologías en el REI “Los planes de ahorro”



SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

En nuestro trabajo hemos comenzado realizando una revisión de la investigación desarrollada en la educación matemática en relación con el dominio "modelización y aplicaciones". Como fruto de este análisis surge la necesidad de reformular, desde la didáctica, la noción de modelización matemática, tanto para identificar nuevos fenómenos didácticos y construir nuevos problemas de investigación como para construir posibles soluciones.

Uno de estos fenómenos didácticos, directamente relacionado con la ausencia escolar de los procesos de modelización matemática, es el *fenómeno de la desarticulación de la matemática* escolar, que se extiende a prácticamente todos los niveles del sistema de enseñaza de las matemáticas. Son muchos los factores que generan esta desarticulación y su identificación constituye, sin lugar a dudas, un problema de investigación amplio y complejo. Sin embargo, la TAD pone a disposición del investigador herramientas valiosas para ahondar en sus orígenes y para construir posibles soluciones que, al menos, reduzcan la desarticulación observada y sus efectos sobre el sistema didáctico.

Si bien es cierto que los documentos curriculares suelen considerar la actividad de resolución de problemas y la modelización matemática como una herramienta teóricamente útil para integrar los contenidos curriculares (véase, por ejemplo, el currículo de la Comunidad Autónoma de Andalucía o los Estándares Curriculares del NCTM), se asume que dicha integración *se producirá "por sí misma"*. En lo relativo a la modelización matemática, es importante tener en cuenta la manera como se interpreta ésta, lo cual depende esencialmente de la posición en la que se sitúa el investigador y del marco teórico que asume y que determina completamente el papel que podrá desempeñar como herramienta de integración de la matemática escolar.

En este trabajo hemos propuesto reformular los *procesos de modelización*, en el marco de la TAD, como procesos de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente (puntuales → locales → regionales), los cuales deben comenzar a partir del cuestionamiento de las *razones de ser* de las organizaciones matemáticas que se desea reconstruir y articular, de donde surgirán las *cuestiones cruciales* para los individuos de la institución en la que se desarrollará el proceso de estudio. Se trata de una nueva concepción de la modelización dentro del marco general de las matemáticas como actividad humana que, por definición, constituye una herramienta de articulación.

Nos hemos centrado en el *problema de la articulación del estudio de las re-*

laciones funcionales en la Educación Secundaria (española). Tras identificarlo y formularlo con precisión en el marco de la TAD, hemos construido un *proceso de estudio*: "los planes de ahorro". Éste se presenta como un *recorrido de estudio e investigación*, para lo cual ha sido necesario reconstruir explícitamente un *modelo epistemológico de referencia* de los sistemas de variación entre magnitudes. El *recorrido de estudio e investigación* diseñado ha desempeñado una doble función en nuestra investigación:

- muestra la pertinencia y la potencia de la reformulación de la noción de modelización matemática como herramienta de análisis didáctico;
- constituye una solución al *problema de la desarticulación del estudio de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria.*

Aunque ya se han realizado dos implementaciones de este REI con alumnos de 14-16 años durante los cursos académicos 2003-2004 y 2004-2005 (García, 2005), que ha permitido ajustar en parte el recorrido descrito, consideramos necesario realizar nuevas experimentaciones que nos permitan mostrar la pertinencia y efectividad del REI propuesto, así como las modificaciones necesarias.[10] De este modo podremos avanzar en el conocimiento y en la caracterización del desarrollo de procesos de modelización matemática tal como se han redefinido aquí, esto es, procesos de estudio largos y complejos que supongan la construcción, ampliación e integración de un conjunto de praxeologías.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blum, W. (2002), "ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 51, núm. 1-2, pp. 149-171.

—— (2005), "'Filling Up'" - The Problem of Independence-preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Task", *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* San Feliu de Guixols, España, 17-21 de febrero.

[10] Según las diferentes etapas de la transposición didáctica, se trata de describir y analizar la organización matemática efectivamente implementada en un proceso de estudio concreto, así como las organizaciones matemáticas realmente aprendidas por los alumnos, comparándolas con la OM "por enseñar" previamente construida. Este análisis ha sido realizado ya, en gran parte, en García (2005).

Blum, W. y M. Niss (1991), "Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, núm. 1, pp. 37-68.

Bolea, P. (2002), *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., M. Bosch y J. Gascón (2001a), "¿Cómo se construyen problemas en didáctica de las matemáticas?", *Educación Matemática*, vol. 13, núm. 3, pp. 23-63.

—— (2001b), "La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21, núm. 3, pp. 247-304.

—— (2003), "Why is Modelling not Included in the Teaching of Algebra at Secondary School?", comunicación presentada en la 3ª Conferencia de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática, Bellaria, Italia, febrero.

Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva de la actividad matemática*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona.

Bosch, M. y J. Gascón (2005), "La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos", en C. Castro y M. Gómez (eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas*, Madrid, Edebé, pp. 135-160.

Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

CECJA (2002), "Decreto 148/2002 por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía", *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, núm. 75, 27de junio.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

—— (1990), "Didactique, anthropologie, mathématiques", Posfacio a la segunda edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

—— (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-226.

—— (2001a), "Aspectos problemáticos de la formación docente", *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, núm. 12.

Chevallard, Y. (2001b), "Les mathématiques et le monde: dépasser l'horreur instrumentale", *Quadrature*, núm. 41, pp. 25-40.

Chevallard, Y. (2002a), "Organiser l'étude 1. Structures et fonctions", en J. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 3-22.

—— (2002b), "Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation", en J. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 3-22.

—— (2006), "Steps Towards a New Epistemology in Mathematics Education", en M. Bosch (ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (en prensa).

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, ICE/Horsori.

De Lange, J. (1996), "Using and Applying Mathematics in Education", en A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 49-98.

Fonseca, C. (2004), *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñaza Secundaria y la Enseñaza Universitaria*, Tesis doctoral, Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht, Reidel.

—— (1991), *Revisiting Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

García, F.J. (2005), *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

García, F.J. y L. Ruiz Higueras (2002), "Reconstrucción y evolución de organizaciones matemáticas en el ámbito de los sistemas de variación de magnitudes", *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, núm. 12.

—— (2006), "Mathematical Praxeologies of Increasing Complexity", en M. Bosch (ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (en prensa), disponible en: http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/13/wg13listofpapers.htm.

Gascón, J. (1993), "Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 13, núm. 3, pp. 295-332.

—— (1999), "Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas", en T. Ortega (ed.), *Actas del III Simposio de la* SEIEM, Valladolid, pp. 129-150.

—— (2001a), "Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), vol. 4, núm. 2, pp. 129-159.

—— (2001b), "Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático", *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales,* Madrid, Universidad Nacional de Educación a Distancia, vol. 28, pp. 1-20.

—— (2003a), "From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes", *For the Learning of Mathematics,* vol. 23, núm. 2, pp. 44-55.

—— (2003b), "La Pedagogía y la Didáctica frente a la problemática del profesorado de matemáticas", Comunicación presentada en el XVI Congreso de ENCIGA, Cangas de Morrazo, Pontevedra.

—— (2005), "El problema de la articulación del currículo de matemáticas", Curso de doctorado, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona (inédito).

Gascón, J., M. Muñoz-Lecanda, J. Sales y R. Segura (2004), "Matemáticas en Secundaria y en Universidad: razones y sin razones de un desencuentro", *Jornadas sobre educación matemática,* Santiago de Compostela, 16-18 de septiembre.

Harel, G. y M. Behr (1989), "Structure and Hierarchy of Missing-Value Proportion Problems and Their Representations", *Journal of Mathematical Behaviour,* vol. 8, pp. 77-119.

Hart, K.M. (1988), "Ratio and proportion", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, vol. 2, pp. 198-219.

Karplus, R., S. Pulos y E. Stage (1981), "Proportional Reasoning in Early Adolescents: Comparison and Missing Value Problems in Three Schools", artículo presentado en la Tercera Conferencia Anual del Grupo de Psicología de la Educación Matemática (PME), Minneapolis, Minnesota.

—— (1983a), "Proportional Reasoning of Early Adolescents", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* Nueva York, Academic Press.

Karplus, R., S. Pulos y E. Stage (1983b), "Early Adolescents' Proportional Reasoning on 'Rate' Problems", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 14, núm. 3, pp. 219-233.

Lamon, S. (1991), "Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking", *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 24, núm. 1, pp. 41-61.

Niss, M. (1999), "Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 40, núm. 1, pp. 1-24.

Noelting, G. (1980a), "The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept: Part I – Differentiation of Stages", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 11, núm. 2, pp. 217-253.

—— (1980b), "The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept: Part II – Problem Structure at Successive Stages; Problem Solving Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 11, núm 3, pp. 331-363.

OCDE (2003), *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Readings, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, París, OCDE.

Singer, J. y L. Resnick (1992), "Representations of Proportional Relationships: Are Children Part-part or Part-whole Reasoners?", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 23, núm. 3, pp. 231-246.

Tourniaire, F. (1986), "Proportions in Elementary School", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 17, núm. 4, pp. 401-412.

Tourniaire, F. y S. Pulos (1985), "Proportional Reasoning: A Review of the Literature", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 16, núm. 2, pp. 181-204.

Treffers, A. y F. Goffree (1985), "Rational Analysis of Realistic Mathematics Education", en L. Streefland (ed.), *Proceedings of PME-9*, Utrecht, OW&OC, pp. 97-123.

Weber, M. (2006), *Conceptos sociológicos fundamentales* (edición y traducción de Joaquín Abellán), Madrid, Alianza Editorial.

DATOS DE LOS AUTORES

Marianna Bosch
Universitat Ramón Llull, Barcelona, España
mbosch@fundemi.com

Francisco Javier García
Universidad de Jaén, España
fjgarcia@ujaen.es

Josep Gascón
Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona
España, gascon@mat.uab.es

Luisa Ruiz Higueras
Universidad de Jaén, España
lruiz@ujaen.es